# Wyprowadzenie wzoru na krzywą łańcuchową

Daniel Pęcak

16 sierpnia 2009

## 1 Wstęp

Być może zastanawiałeś się kiedyś drogi czytelniku nad kształtem, jaki kształt przyjmuje zwisający swobodnie łańcuch lub sznur (oczywiście o obu końcach zamocowanych). Nawet dowiadując się, że ta krzywa jest nazywana krzywą łańuchową, miałem wrażenie, że jest to parabola. Wydaje się to dosyć naturalne. Nie tylko ja dałem się nabrać, ale także wielcy uczeni. Galileusz w swoich „Dialogach" milcząco przyjął, że jest to funkcja kwadratowa. Dopiero Christiaan Huygens przedstawił geometryczny dowód (bardzo skomplikowany), w którym wykazał, że kształt zawieszonego sznura może być przedstawiony za pomocą wykresu kosinusa hiperbolicznego. W tym czasie tworzyło się potężne narzędzie dla naukowców, jakim jest dział analizy matematycznej. Za pomocą rachunku różniczkowego Huygens, a także Leibnitz oraz Bernouli wykazali, że istotnie, kształt zwisającej swobodnie linki to kosinus hiperboliczny, nazywany krzywą łańcuchową.

Aby rozwiązać ten problem możemy użyć rachunku wariacyjnego, dzięki któremu otrzymamy rozwiązanie lub możemy ograniczyć się do umiejętności całkowania prostych funkcji i zastosować pewien chwyt. Ze względu na prostotę i pomysłowość drugiego sposobu, z niego właśnie skorzystamy.

W tym miejscu czas na definicję sinusa i kosinusa hiperbolicznego, co przyda się później:

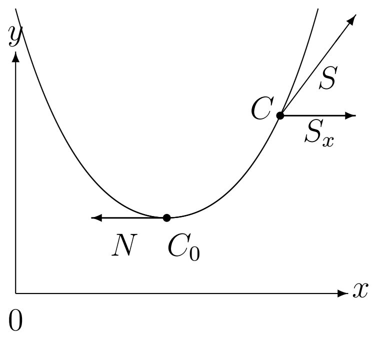
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{2}$$

W tej chwili jako ćwiczenie można policzyć pochodną oraz całkę każdej z tych funkcji.

## 2 Linia łańcuchowa

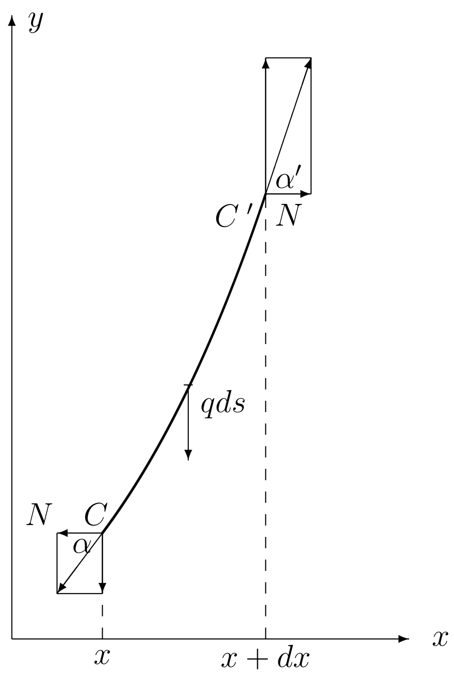
Rozważmy idealnie wiotki sznur, który jest zaczepiony w punktach $A$ oraz $B$. Gęstość liniowa sznura wynosi $q(x)$ w ogólnym przypadku, lecz w naszym założymy, że gęstość liniowa jest stała i wynosi $q$.




Z III prawa dynamiki wynika, że aby wycinek $C_0C$ pozostawał w spoczynku, to siły nań działające muszą się równoważyć. W punkcie $C_0$ przyłożona siła jest pozioma, więc musi się równoważyć z poziomą składową siły przyłożonej w punkcie $C$, zatem $S_x - N = 0 \Leftrightarrow S_x = N = const$.

Widzimy więc, że pozioma składowa działająca na każdy element sznura jest stała, równa napięciu sznura w najniższym punkcie.

Zajmijmy się elementem $CC'$ o długości $ds$, którego lewy kraniec ma współczędną $x$, natomiast prawy — $x + dx$. Masa wycinka wynosi $dsq$. W punkcie $C$ siła jest skierowana pod kątem $\alpha$ do poziomu, natomiast w punkcie $C'$ pod kątem $\alpha'$.




Aby ten wycinek został w spoczynku, siły działające w poziomie muszą się sumować do zera, podobnie jest ze składowymi pionowymi:

$$N \operatorname{tg} \alpha' - N \operatorname{tg} \alpha - qds = 0 \tag{3}$$

Ponadto przy wzroście $x$ o $dx$ przyrost $\operatorname{tg} \alpha$ można wyrazić następująco:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha + d(\operatorname{tg} \alpha). \tag{4}$$

Jednoczesnie wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$. Łącząc te dwa fakty, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{dy}{dx} + d(\frac{dy}{dx}) = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}dx \tag{5}$$

Połączywszy powyższe przekształcenia otrzymujemy:

$$N(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}dx) - N\frac{dy}{dx} - qds = 0 \Leftrightarrow N\frac{dy}{dx} + N\frac{d^2y}{dx^2}dx - N\frac{dy}{dx} - qds = 0 \tag{6}$$

$$N\frac{d^2y}{dx^2}dx - qds = 0 \tag{7}$$

Wiemy, że wzór na długość krzywej ma postać: $ds = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx$. Stąd:

$$N\frac{d^2y}{dx^2} - q\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = 0 \Leftrightarrow N\frac{d^2y}{dx^2} = q\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \tag{8}$$

Dokonujemy podstawienia $t = \frac{dy}{dx}$.

$$N\frac{dt}{dx} = q\sqrt{1 + t^2} \tag{9}$$

Rozdzielamy zmienne:

$$\frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{q}{N}dx \Leftrightarrow \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{q}{N}dx \tag{10}$$

Prawą stronę równania rozwiązujemy w następujący sposób:

$$\int \frac{q}{N}dx = \frac{q}{N}\int dx = \frac{q}{N}x + D'', \tag{11}$$

gdzie $D''$ jest stałą całkowania.

Aby obliczyć całkę znajdującą się po lewej stronie dokonujemy podstawienia Eulera:

$$k = t + \sqrt{1 + t^2} \Rightarrow dk = (1 + \frac{2t}{2\sqrt{1 + t^2}})dt \Leftrightarrow dk = (1 + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}})dt \Leftrightarrow \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow dt = \frac{dk}{1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} \tag{13}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{\frac{dk}{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}}{\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{dk}{(1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}})\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{dk}{t + \sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{dk}{k} = \tag{14}$$

$$= \ln k + D' = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) + D', \tag{15}$$

gdzie $D'$ to stała całkowania. Mamy więc równanie:

$$\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) = \frac{qx}{N} + D \Leftrightarrow t + \sqrt{1 + t^2} = e^{\frac{qx}{N}+D} \Leftrightarrow \sqrt{1 + t^2} = e^{\frac{qx}{N}+D} - t \Leftrightarrow \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow 1 + t^2 = e^{2(\frac{qx}{N}+D)} - 2te^{\frac{qx}{N}+D} + t^2 \Leftrightarrow 1 = e^{(2\frac{qx}{N}+D)} - 2te^{\frac{qx}{N}+D} \Leftrightarrow \tag{17}$$

$$e^{(2\frac{qx}{N}+D)} - 1 = 2te^{\frac{qx}{N}+D} \Leftrightarrow \frac{e^{2(\frac{qx}{N}+D)} - 1}{2e^{\frac{qx}{N}+D}} = t \Leftrightarrow \tag{18}$$

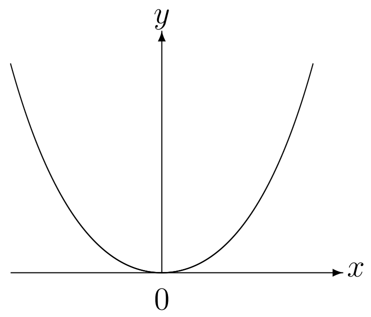
$$\Leftrightarrow t = \frac{e^{2(\frac{qx}{N}+D)} - 1}{2e^{\frac{qx}{N}+D}} \Leftrightarrow t = \frac{e^{\frac{qx}{N}+D} - e^{\frac{qx}{N}+D}}{2} \Leftrightarrow t = \sinh\frac{qx}{N} + D \tag{19}$$

W tym miejscu możemy zrezygnować ze zmiennej $t$ i rozwiązać proste równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{qx}{N} + D \Leftrightarrow dy = (\sinh\frac{qx}{N} + D)dx \Leftrightarrow \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \int dy = \int (\sinh\frac{qx}{N} + D)dx \Leftrightarrow y = \frac{N}{q}\cosh(\frac{qx}{N} + D) + E \tag{21}$$

Aby określić wygląd funkcji skorzystamy z warunków początkowych — zakładamy, że funkcja w punkcie 0 przyjmuje wartość 0 i jest to jej najniższy punkt, zatem pochodna w punkcie 0 również jest równa 0.




$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow \sinh\frac{qx}{N} + D = 0 \Leftrightarrow \sinh\frac{q\cdot 0}{N} + D = 0 \Leftrightarrow \tag{22}$$

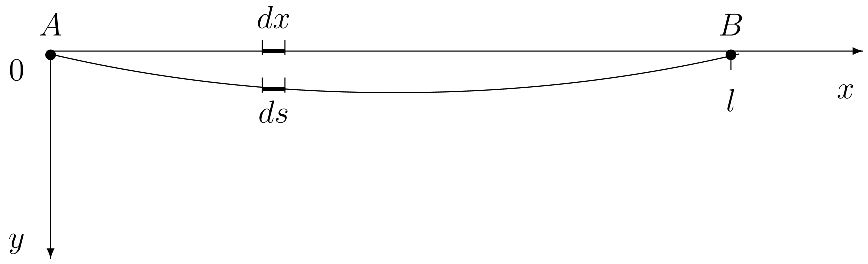
$$\Leftrightarrow \sinh D = 0 \Leftrightarrow D = 0 \tag{23}$$

$$y(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{N}{q}\cosh(\frac{qx}{N} + D) + E \Leftrightarrow \frac{N}{q}\cosh(\frac{q\cdot 0}{N}) + E \Leftrightarrow E = -\frac{N}{q}. \tag{24}$$

Stąd ostateczna postać tego wzoru to: $y = \frac{N}{q}(\cosh\frac{q}{N} - 1)$.

## 3 Krzywa sznurowa

Równanie trochę się uprości, gdy spróbujemy wyprowadzić je dla sznura o małym zwisie.




Załóżmy teraz, że $|AB| \approx s$, a dla wygody przyjmijmy zwrot osi Y w dół (zatem zamiast $y$ napiszemy $-y$). Przekształcając równanie (7) daje nam to:

$$N\frac{d^2y}{dx^2}dx + q(x)ds = 0. \tag{25}$$

Z naszych założen wynika, że $ds \approx dx$.

$$N\frac{d^2y}{dx^2}dx + q(x)dx = 0. \tag{26}$$

Ponownie przyjmujemy, że gęstość liniowa $q(x) = const$. Stąd

$$N\frac{d^2y}{dx^2}dx = -qdx \Leftrightarrow \int N\frac{d^2y}{dx^2}dx = -\int qdx \Leftrightarrow N\frac{dy}{dx} = -qx + D \Leftrightarrow \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \int Ndy = -\int (qx + D)dx \Leftrightarrow Ny = -q\frac{x^2}{2} + Dx + E \Leftrightarrow y = \frac{1}{N}(-q\frac{x^2}{2} + Dx + E). \tag{28}$$

Wyznaczamy stałe $D, E$ z warunków, aby poczatek i koniec sznura był na poziomie 0 :

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{N}(-q\frac{0^2}{2} + D \cdot 0 + E) = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{E}{N} \Leftrightarrow E = 0 \tag{29}$$

oraz:

$$y(l) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{N}(-q\frac{l^2}{2} + D \cdot l) = 0 \Leftrightarrow -q\frac{l^2}{2} + D \cdot l = 0 \Leftrightarrow \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow q\frac{l^2}{2} = D \cdot l \Leftrightarrow D = \frac{ql}{2}. \tag{31}$$

Zatem postać szukanej funkcji ma postać:

$$y = \frac{qx}{2N}(l - x). \tag{32}$$

# 4 Podsumowanie

Krzywą łańcuchową opisuje wzór:

$$y = \frac{N}{q}(\cosh\frac{q}{N} - 1). \tag{33}$$

Dla niewielkiego zwisu poprawny jest poniższy wzór:

$$y = \frac{qx}{2N}(l - x). \tag{34}$$

Widzimy więc, że intuicja człowieka słusznie kojarzyła sznur z wykresem funkcji kwadratowej.